

Chapitre III: Intégrales généralisées

Mohamed CH-Chaoui
Department de Mathématiques, FP Khouribga.
Email: mohamed.chchaoui@gmail.com

22 juin 2020

Table des matières

1 Définitions	1
2 Convergence et divergence des intégrales généralisées	1
3 Intégrales généralisées des fonctions gardant un signe constant	5
4 Intégrales généralisées des fonctions de signe quelconque	7
4.1 Intégrales généralisées absolument convergentes	7
4.2 Critère d'Abel	8
4.3 Intégration par parties et changement de variables	8

1 Définitions

L'intégrale de Riemann est définie pour toute fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a; b]$. Il est alors naturel de se poser la question de savoir si cette notion peut être généralisée pour permettre la définition de l'intégrale d'une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle quelconque. Dans ce chapitre, nous allons donner une réponse à cette question pour une classe de fonctions localement intégrables.

Définition 1.1. On appelle *intégrale généralisée (ou impropre) l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle non borné ou l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné.*

Exemple -

$$\int \frac{1}{x^n} dx \quad \text{sur }]0, 1] \quad \text{ou sur } [1, \infty[$$

Définition 1.2. On dira qu'une fonction f est localement intégrable sur un intervalle quelconque I si elle est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[a; b] \subset I$.

La définition et les propriétés de l'intégrale de Riemann sur un segment fermé borné $[a; b]$ sont supposés connus.

Notation. Dans tout ce chapitre, sauf mention du contraire, J désignera un intervalle de la forme $[a; b[$ ou $]b; a]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. Pour toute fonction f localement intégrable sur J , on notera $F : J \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

2 Convergence et divergence des intégrales généralisées

Définition 2.1. Soit f une fonction localement intégrable sur J .

1. On dit que l'intégrale de f sur J est convergente si $\lim_{x \rightarrow b} \mathbf{F}(x)$ existe et est finie. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale de f sur J est divergente.
2. Si l'intégrale de f est convergente sur $J = [a; b[$, on pose

$$\int_J f(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^+} \int_a^x f(t)dt$$

3. Si l'intégrale de f est convergente sur $J =]b; a]$, on pose

$$\int_J f(t)dt = \int_b^a f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_x^a f(t)dt$$

L'intégrale $\int_J f(t)dt$ est appelée **intégrale généralisée** de f sur J .

Définition 2.2. Soit f une fonction localement intégrable sur $I =]b_1; b_2[$ avec $b_1; b_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dira que l'intégrale de f est convergente sur I s'il existe un réel $c \in I$ tel que les intégrales $\int_{b_1}^c f(t)dt$ et $\int_c^{b_2} f(t)dt$ sont convergentes, on pose alors

$$\int_I f(t)dt = \int_{b_1}^{b_2} f(t)dt = \int_{b_1}^c f(t)dt + \int_c^{b_2} f(t)dt$$

Remarque -

- La définition ci-dessus ne dépend pas du choix du réel c .
- Dans ce qui suit, l'expression "étudier la nature de $\int_J f(t)dt$ " est un raccourci pour "étudier la convergence de l'intégrale de f sur J ".
- Si $\int_J f(t)dt$ est convergente, comme dans le cas des intégrales de Riemann, on adopte la convention $\int_a^b f(t)dt = - \int_b^a f(t)dt$.

Les remarques et propriétés suivantes sont immédiates :

Propriété 1. 1. Soit f localement intégrable sur J . Si $\int_J f(t)dt$ est convergente alors, pour tout $c \in J$, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

2. Si f et g sont localement intégrables sur J et si $\int_J f(t)dt$ et $\int_J g(t)dt$ sont convergentes alors, pour tous $\alpha; \beta \in \mathbb{R}$, $\int_J (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ est convergente et on a

$$\int_J (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_J f(t)dt + \beta \int_J g(t)dt$$

3. Soit $0 < \alpha \leq +\infty$ et f localement intégrable sur $] - \alpha; \alpha[$. Alors :

— Si f est paire alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_0^{\alpha} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2 \int_0^{\alpha} f(t)dt$$

— Si f est impaire alors $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_0^{\alpha} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 0$$

Exemples -

1. La fonction qui à $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}$ localement intégrable sur $]0; 1]$ et, pour tout $x \in]0; 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x};$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0} 2 - 2\sqrt{x} = 2$$

2. La fonction qui à $t \rightarrow e^{-t}$ est localement intégrable sur $[0; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x};$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$$

3. La fonction qui à $t \rightarrow \sin t$ est localement intégrable sur $] -\infty, 0]$ et, pour tout $x < 0$,

$$\int_x^0 \sin t dt = \cos x - 1$$

or $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos x$ n'existe pas donc $\int_{-\infty}^0 \sin t dt$ diverge.

4. La fonction qui à $t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ est localement intégrable sur $] -\infty; +\infty[$ et, pour tout $x > 0$ et $y < 0$, on a

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x \quad \text{et} \quad \int_y^0 \frac{1}{1+t^2} dt = -\arctan y;$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}; \\ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt &= \lim_{y \rightarrow -\infty} (-\arctan y) = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \pi$$

5. Nous allons étudier la nature de l'intégrale généralisée $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2-1}$. La fonction qui à $t \rightarrow \frac{1}{t^2-1}$ est localement intégrable sur $] -1; 1[$ et est paire, donc étudier la nature de $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2-1}$ est équivalent à étudier la nature de $\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1}$. Or, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right)$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{x+1} \right) = -\infty$$

En conclusion, $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2-1}$ n'est pas convergente.

Remarque - Attention, si f est localement intégrable sur $] -\infty; +\infty[$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est équivalente à la convergence des intégrales $\int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$. Il est alors important de noter que l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-x}^x f(t)dt$ n'entraîne pas la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

Par exemple, pour tout $x > 0$, on a

$$\int_{-x}^x \sin t dt = 0;$$

(car la fonction $t \rightarrow \sin t$ est impaire). Néanmoins, on a vu en (3) que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t dt$ n'est pas convergente.

Nous allons finir cette section par la donnée d'une classe importante d'intégrales généralisées connues sous le nom d'intégrales de Riemann. Ces intégrales généralisées sont très utiles lors des tests de comparaison (Voir Corollaires (1) et (2))

Exemples -(Intégrales de Riemann)

1. On considère l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in]0; 1[$, on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1; \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1; \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \iff \alpha < 1 \tag{2.1}$$

et dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$$

2. On considère l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}; \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right) & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1; \\ 0 & \text{si } \alpha > 1; \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \iff \alpha > 1 \quad (2.2)$$

et dans ce cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Remarque - l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

n'est jamais convergente.

3 Intégrales généralisées des fonctions gardant un signe constant

Soit f une fonction localement intégrable sur J . On suppose qu'il existe $c \in J$ tel que f garde un signe constant sur $I = [c; b[$ ou $I =]b; c]$. Comme les intégrales généralisées

$$\int_J f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_I f(t) dt$$

sont de même nature, on peut supposer que $I = J$. Aussi les intégrales généralisées

$$\int_J f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_J (-f(t)) dt$$

sont de même nature, on peut supposer que f est positive. Dans ce cas, l'étude de l'intégrale généralisée $\int_J f(t) dt$ est relativement simple et repose essentiellement sur les critères de convergence des intégrales généralisées qui suivent. Ce sont des critères simples à vérifier et permettent de déduire la convergence d'une large classe d'intégrales généralisées. Il est important de noter que ces critères ne sont valables que pour les fonctions qui gardent un signe constant au voisinage de b . Nous allons énoncer ces critères pour les fonctions positives.

Propriété 2. (Critère de comparaison)

Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur J telles que, pour tout $x \in J$ on a $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors :

1. Si $\int_J g(x) dx$ converge alors $\int_J f(x) dx$ converge.

2. Si $\int_J f(x)dx$ diverge alors $\int_J g(x)dx$ diverge.

Exemple - Soit $\alpha > 1$, alors $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} dt$ est convergente. En effet, on a

$$0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ est convergente car $\alpha > 1$, donc par comparaison I est convergente.

Théorème 1. (Critère d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions positives localement intégrables sur J . Alors :

1. Si $f \underset{b}{\sim} Mg$ avec $0 < M < +\infty$ alors les intégrales généralisées $\int_J g(x)dx$ et $\int_J f(x)dx$ sont de même nature.
2. Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\int_J g(x)dx$ converge alors $\int_J f(x)dx$ converge
3. Si $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ et $\int_J g(x)dx$ diverge alors $\int_J f(x)dx$ diverge.

En prenant dans ce théorème $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et en combinant (2.1) et (2.2) avec les résultats du Théorème (1), on obtient les deux corollaires très usuels suivants.

Corollaire 1. Soient $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction positive, localement intégrable sur $]0, a]$ avec

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^\alpha f(t) = M$$

Alors :

1. Si $0 < M < +\infty$ alors $\int_0^a f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
2. Si $M = 0$ et $\alpha < 1$ alors $\int_0^a f(t)dt$ est convergente.
3. Si $M = +\infty$ et $\alpha \geq 1$ alors $\int_0^a f(t)dt$ est divergente.

Corollaire 2. Soient $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction positive, localement intégrable sur $[a; +\infty[$ avec

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = M$$

Alors

1. Si $0 < M < +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Si $M = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
3. Si $M = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Exemples -

1. Nous allons étudier la nature de

$$I_\alpha = \int_0^1 \frac{\ln(1+t) \sin(t)}{t^\alpha} dt, \quad \alpha > 0$$

On a

$$0 \leq \frac{\ln(1+t) \sin(t)}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{t \times t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-2}}$$

or l'intégrale $\int \frac{1}{t^{\alpha-2}}$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < 1$ c.à.d $\alpha < 3$, on déduit

$$I_\alpha \text{ converge si et seulement si } \alpha < 3.$$

2. Nous allons étudier la nature de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 + 1} dt$$

La fonction $t \rightarrow \frac{\ln t}{t^2 + 1}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$. En plus,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2 + 1} = 0$$

Donc, d'après le corollaire (2), l'intégrale I est convergente.

4 Intégrales généralisées des fonctions de signe quelconque

4.1 Intégrales généralisées absolument convergentes

Définition 4.1. Soit f continue sur un intervalle quelconque I . On dira que $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente si $\int_I |f(t)| dt$ est convergente.

Théorème 2. Soit f localement intégrable sur un intervalle quelconque I . Si $\int_I f(t) dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a

$$\left| \int_I f(t) dt \right| \leq \int_I |f(t)| dt$$

Exemples - la réciproque est fautive, il existe des intégrales qui sont convergentes mais pas absolument convergentes, on les appelle intégrales semi-convergentes.

Définition 4.2. Soit f localement intégrable sur un intervalle quelconque I . On dira que $\int_I f(t) dt$ est semi-convergente si $\int_I |f(t)| dt$ est divergente et $\int_I f(t) dt$ est convergente.

Exemples - Nous allons montrer que

$$\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}} dt$$

est absolument convergente. La fonction $t \rightarrow \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}}$ est continue sur $]0; 1]$ et ne garde pas un signe constant au voisinage de 0. On a

$$0 \leq \left| \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\sin t}} = 1$$

Donc, d'après le corollaire (1), $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\sin t}}$ est convergente. En utilisant le Théorème (2), on déduit que $\int_0^1 \frac{\sin(\frac{1}{t})}{\sqrt{\sin t}} dt$ est absolument convergente et donc convergente.

4.2 Critère d'Abel

L'étude des intégrales généralisées des fonctions dont le signe varie sur leur domaine de définition est plus difficile que celles gardant un signe constant. Le critère d'Abel, simple à retenir et à appliquer, permet de déduire la convergence des intégrales généralisées d'une large classe de telles fonctions.

Théorème 3. (Critère d'Abel)

Soient f et g localement intégrables sur $[a, +\infty[$ et telles que :

1. la fonction g est décroissante à valeurs positives sur $[a, +\infty[$ avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0;$$

2. il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq M$$

Alors, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exemples -En utilisant le critère d'Abel, nous allons montrer que, pour tout $0 < \alpha \leq 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente. Posons

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

on a d'une part la fonction $t \rightarrow g(t)$ est décroissante et $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$.

D'autre part,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \left| \int_1^x f(t) dt \right| = |\cos(x) + \cos(1)| \leq 2$$

Les conditions du Critère d'Abel sont vérifiées et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente.

4.3 Intégration par parties et changement de variables

Dans le cas des intégrales généralisées, l'intégration par parties permet d'abord de déduire la convergence et, ensuite, comme dans le cas classique, de calculer les intégrales.

Théorème 4. Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur J telles que $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$ existe et est finie. Alors $\int_J u'(t)v(t)dt$ et $\int_J u(t)v'(t)dt$ sont de même nature et quand elles convergent on a

$$\int_J u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_J - \int_J u(t)v'(t)dt$$

Il est important de noter que la notation $[u(t)v(t)]_J$ implique $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$. Ainsi, par exemple, si $J = [a; b[$, on a

$$[u(t)v(t)]_J = \lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t) - u(a)v(a)$$

Remarque - Ce théorème est à utiliser avec précaution : on commence d'abord par calculer $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t)$ et étudier la convergence de l'une des deux intégrales $\int_J u'(t)v(t)dt$ et $\int_J u(t)v'(t)dt$ (la plus simple bien sûr), une fois on a la convergence on peut écrire l'égalité ci-dessus.

Théorème 5. Soit ϕ de classe C^1 et monotone sur J et f continue sur $\phi(J)$. Alors $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ et $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$ sont de même nature et quand elles convergent on a

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$$

Remarque - Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en une intégrale généralisée et vice-versa. Par exemple, $\int_0^\pi \frac{dt}{2 + \cos t}$ est transformée après le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ en $\int_0^{+\infty} \frac{2du}{3 + u^2}$.